Całka oznaczona - wstęp

Określenie całki oznaczonej

Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, która jest ograniczona w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$.
Dokonajmy podziału odcinka $\langle a, b \rangle$ na n podprzedziałów dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, ..., x_n$, gdzie

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \,.$$

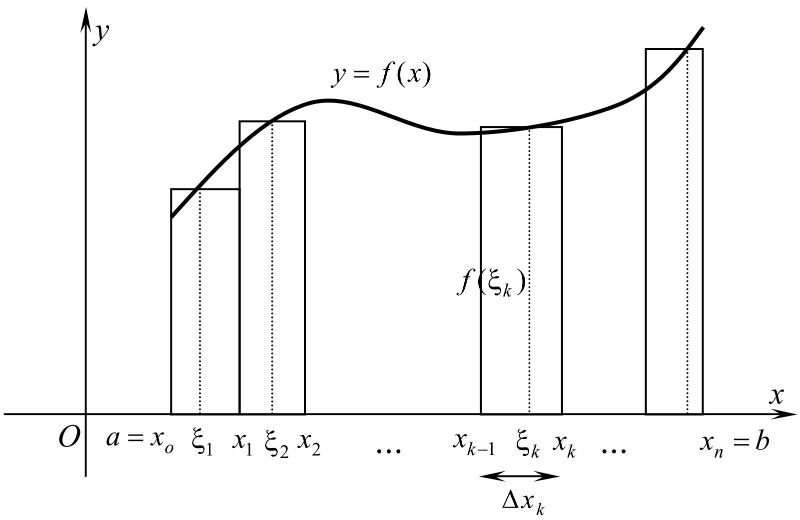
Oznaczmy:

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – *długość podprzedziału* $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, gdzie $k = 1, 2, ..., n$,

$\delta_n = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ – *średnica podziału.*

Jeżeli dla każdego n mamy pewien podział, to mówimy, że określony jest *ciąg podziałów* przedziału $\langle a, b \rangle$ oraz ciąg średnic (δ_n).

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$, to ciąg podziałów przedziału $\langle a, b \rangle$ nazywamy *normalnym.*



Rys. 1. Interpretacja geometryczna pojęcia sumy całkowej

W każdym podprzedziale $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ obieramy dowolnie punkt ξ_k taki, że $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, a następnie tworzymy tzw. *sumę całkową*

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \,.$$

Na rysunku 1 przedstawiono interpretację geometryczną pojęcia sumy całkowej. Jeżeli spełniony jest warunek, że $f(x) \ge 0$ dla każdego $x \in \langle a, b \rangle$, to k-ty składnik sumy całkowej jest polem prostokąta o podstawie długości Δx_k i wysokości $f(\xi_k)$. Widzimy zatem, że suma całkowa jest sumą pól wszystkich n takich prostokątów. Można ją więc traktować, jako pewne przybliżenie pola obszaru ograniczonego wykresem funkcji o równaniu $y = f(x)$, osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$. Jeżeli mamy do czynienia z normalnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$, w którym wraz ze wzrostem *n,* długości podstaw kolejnych prostokątów są coraz mniejsze, to w ogólności można twierdzić, że im większe n, tym to przybliżenie jest coraz dokładniejsze.

Definicja. Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $\langle a,b\rangle$ każdy ciąg sum całkowych (σ_n) dąży do tej samej granicy skończonej i granica ta nie zależy od wyboru punktów ξ_k ($k=1,2,...,n$), to granicę tę nazywamy *całką oznaczoną* funkcji f w przedziale $\langle a,b\rangle$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Możemy zatem zapisać

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Jest to tzw. *całka Riemanna*.

Liczbę a nazywamy *dolną granicą całkowania*, liczbę b – *granicą górną*, przedział $\langle a,b\rangle$ – *przedziałem całkowania*.

W celu uzupełnienia definicji przyjmijmy

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Jeżeli funkcja f ma całkę oznaczoną w przedziale $\langle a,b\rangle$, to nazywamy ją *całkowalną* (w sensie Riemanna) w tym przedziale.

Podstawowe własności całki oznaczonej i jej obliczanie

Twierdzenie. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $\langle a,b\rangle$, to

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, k – dowolna stała,
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, gdzie $a \le c \le b$.

Twierdzenie. (*Newtona-Leibniza – podstawowe twierdzenie rachunku całkowego*).

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $\langle a,b\rangle$, to prawdziwy jest wzór (wzór Newtona-Leibniza):

(1)
$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Inny często spotykany zapis:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Wzór Newtona-Leibniza daje praktyczny i wygodny sposób obliczania całek oznaczonych. Wnioskujemy z niego, że umiejętność wyznaczania całek oznaczonych sprowadza się do umiejętności obliczania całek nieoznaczonych (wyznaczania funkcji pierwotnej danej funkcji).

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{x^3}\right)dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$.

Rozwiązanie.

a) $$\int_1^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{x^3}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3}{2}x^2-4x^{-3}\right)dx=\Bigg[\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{-2}x^{-2}}_{F(x)}\Bigg]_1^2=$$

$$=\Bigg[\underbrace{\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{x^2}}_{F(x)}\Bigg]_1^2=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot 2^3+\frac{2}{2^2}\right)}_{F(2)}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot 1^3+\frac{2}{1^2}\right)}_{F(1)}=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2=2,$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left[-\cos x-\operatorname{tg}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\cos 0-\operatorname{tg}0\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Twierdzenie. (*o całkowaniu przez podstawienie*)
Jeżeli

1) funkcja $g:\langle\alpha,\beta\rangle\xrightarrow{na}\langle a,b\rangle$ ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$,
2) $a=g(\alpha),\ b=g(\beta)$,
3) funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$

to

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\left|\begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)dx=dt \end{array}\right|=\int_a^b f(t)dt.$$

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\displaystyle\int_0^3\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx$, b) $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x+1}$.

Rozwiązanie.

a) $$\int_0^3\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx=\left|\begin{array}{c} 25-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_{25}^{16}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_{16}^{25}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_{16}^{25}=$$

$$=\left[\sqrt{t}\right]_{16}^{25}=\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1.$$

Przy takim zapisie należy pamiętać o zmianie granic całkowania przy przejściu na tymczasową zmienną *t*. Nowe granice całkowania wyznaczamy z równości $25-x^2=t$, podstawiając w miejsce x najpierw dolną, potem górną granicę całkowania. Otrzymujemy wówczas nowe granice całkowania dla zmiennej *t*:

x	0	3
$t=25-x^2$	25	16

Przy obliczaniu całek oznaczonych można również zastosować inny sposób zapisu. W pierwszej kolejności można obliczyć całkę nieoznaczoną, a potem bazując na wzorze Newtona-Leibniza wykorzystać wynik tych obliczeń do wyznaczenia całki oznaczonej. Dla powyższego przykładu wyglądałoby to następująco:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 25-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{25-x^2} + C$$

zatem $F(x) = -\sqrt{25-x^2}$, a stąd

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx = \left[-\sqrt{25-x^2}\right]_0^3 = \left(-\sqrt{25-3^2}\right) - \left(-\sqrt{25-0^2}\right) = -4+5=1 .$$

Widać, że przy takim sposobie zapisu nie musimy dokonywać zmiany granic całkowania.

b) $$\int_1^{e} \frac{\ln^3 x}{x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ \ln 1 = 0,\ \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^3 dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} .$$

c) Zastosujemy tutaj podstawienie uniwersalne:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x+1} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t & \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = 0 \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt & \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}}dt = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}dt = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1-0=1$$

Twierdzenie. (*o całkowaniu przez części*)
Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne w przedziale $\langle a, b\rangle$, to

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx .$$

Przykład. Obliczyć całkę

a) $\int_1^{e} \sqrt[3]{x}\ln x dx$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x dx$.

Rozwiązanie.

a) $$\int_1^e \sqrt[3]{x}\ln x dx = \int_1^e x^{\frac{1}{3}} \ln x dx = \left| \begin{matrix} u(x)=\ln x & v'(x)=x^{\frac{1}{3}} \\ u'(x)=\dfrac{1}{x} & v(x)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \end{matrix} \right| = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln x\right]_1^e - \frac{3}{4}\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x^{\frac{4}{3}}dx =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4}\ln e - \frac{3}{4}\ln 1 - \frac{3}{4}\int_1^e x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4} - \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^e = \frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4} - \frac{9}{16}\left[\sqrt[3]{x^4}\right]_1^e =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{e^4} - \frac{9}{16}\left(\sqrt[3]{e^4}-1\right) = \frac{12}{16}\sqrt[3]{e^4} - \frac{9}{16}\sqrt[3]{e^4} + \frac{9}{16} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{e^4} + \frac{9}{16} = \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{e^4}+3\right).$$

Oczywiście, również w tym przypadku można było najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną, a następnie zastosować wzór Newtona-Leibniza. Zapis byłby wówczas bardziej przejrzysty.

b) W tym przykładzie zastosujemy odmienny sposób zapisu. Najpierw obliczymy całkę nieoznaczoną, a potem otrzymany wynik wykorzystamy, aby obliczyć całkę oznaczoną.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u(x)=x & v'(x)=\cos x \\ u'(x)=1 & v(x)=\sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = \underbrace{x\sin x + \cos x}_{F(x)} + C.$$

Zatem, stosując wzór Newtona-Leibniza otrzymamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos x dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \cos 0\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć całki:

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(4x^3+5x-1\right)dx$, **2.** $\displaystyle\int_{-2}^2 (x-1)^3\,dx$, **3.** $\displaystyle\int_1^2 \sqrt[4]{x^3}\,dx$, **4.** $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}dx$,

5. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$, **6.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$, **7.** $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$, **8.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}x\,dx$,

9. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$, **10.** $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$, **11.** $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{arctg}x\,dx$, **12.** $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1}$,

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$, **14.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$, **15.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$, **18.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

Opracowanie:

dr Igor Kierkosz

dr hab. Volodymyr Sushch